Épreuve du Grand Oral au Baccalauréat

Pourquoi les logarithmes sont-ils essentiels en finance ?

Yrieix Brissard

Thème : Fonction Logarithme Népérien et Applications Économiques

Introduction

Quand on aborde la fonction logarithme népérien en classe de Terminale, on la perçoit souvent comme un objet purement abstrait, une simple fonction réciproque de l'exponentielle utile pour résoudre des équations théoriques. Pourtant, dès que l'on se penche sur les sciences économiques et la finance de marché, le logarithme s'impose comme un outil omniprésent et fondamental. Il intervient de manière critique dès qu'il s'agit d'analyser une croissance, de modéliser des taux d'intérêt ou de mesurer la performance d'un portefeuille d'actifs.

Imaginons une situation financière simple : un épargnant place un capital initial à un taux d'intérêt annuel fixe de 5%. Il est aisé de calculer par des multiplications successives la valeur de ce placement au bout d'une ou deux années. En revanche, une question bien plus stratégique se pose : *au bout de combien de temps ce capital aura-t-il doublé ?* Dans cette configuration, l'inconnue recherchée n'est plus un facteur multiplicatif, mais se situe directement en exposant. C'est précisément à cet instant que les opérations arithmétiques ordinaires échouent et que le logarithme devient indispensable.

Dès lors, nous pouvons formuler notre problématique : **En quoi la fonction logarithme népérien constitue-t-elle un outil conceptuel et mathématique indispensable à la modélisation et à la compréhension des mécanismes financiers ?**

La thèse que je soutiens est que le logarithme est essentiel car il opère une transformation mathématique majeure : il convertit une croissance multiplicative — souvent complexe à appréhender et à manipuler sur plusieurs périodes — en une mesure additive linéaire beaucoup plus simple. Pour le démontrer, nous analyserons trois piliers de son utilisation : la résolution des équations de temps dans la croissance composée, la formalisation de la capitalisation continue, et enfin la linéarisation des rendements financiers.

1 Retrouver le temps caché dans une croissance composée

En finance, l'évolution d'un investissement ou d'une dette ne suit pas une trajectoire linéaire (additive), mais une dynamique exponentielle (multiplicative) dictée par les intérêts composés.

1.1 Modélisation de la croissance discrète

Lorsqu'un capital initial, noté C_0, est placé au taux d'intérêt annuel i (exprimé en décimal, par exemple 0,05 pour 5%), les intérêts de chaque année s'ajoutent au capital pour produire de nouveaux intérêts l'année suivante. Au bout de n années, le capital final C_n est modélisé par le terme général d'une suite géométrique de raison $(1+i)$:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n$$

Si le calcul de C_n connaissant n est immédiat, l'isolation de la durée n pour atteindre un objectif financier précis nécessite l'utilisation de la fonction logarithme.

1.2 Résolution algébrique d'un doublement de capital

Reprenons notre exemple pratique : nous cherchons la durée n nécessaire pour qu'un capital initial de 1 000 euros double et atteigne 2 000 euros, à un taux annuel de 5% ($i = 0{,}05$). L'équation s'écrit :

$$1\,000 \times (1{,}05)^n = 2\,000$$

En divisant chaque membre par 1 000, nous isolons la puissance :

$$(1{,}05)^n = 2$$

L'inconnue n étant en exposant, nous appliquons la fonction logarithme népérien ln, strictement croissante sur $]0; +\infty[$, de part et d'autre de l'égalité :

$$\ln\left((1{,}05)^n\right) = \ln(2)$$

En utilisant la propriété fondamentale de la fonction logarithme sur les puissances, à savoir $\ln(a^n) = n\ln(a)$ pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous transformons l'exposant en un coefficient multiplicatif :

$$n \times \ln(1{,}05) = \ln(2)$$

Puisque $\ln(1{,}05) \neq 0$, nous pouvons isoler n par division :

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)}$$

En substituant par les valeurs numériques approximatives apprises en cours ($\ln(2) \approx 0{,}6931$ et $\ln(1{,}05) \approx 0{,}0488$), nous obtenons :

$$n \approx \frac{0{,}6931}{0{,}0488} \approx 14{,}2 \text{ années}$$

1.3 Ouverture financière : La Règle de 72

Cette résolution mathématique est à l'origine d'un outil célèbre utilisé par les praticiens de la finance : **la règle de 72**. En effet, pour de petites valeurs de i, le développement limité de la fonction logarithme en 1 nous indique que $\ln(1 + i) \approx i$. Par conséquent, la formule de doublement devient :

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1+i)} \approx \frac{0{,}693}{i}$$

Si l'on exprime le taux d'intérêt en pourcentage $t = 100 \times i$, la formule s'ajuste en $n \approx \frac{69{,}3}{t}$. Pour des raisons de divisibilité pratique en calcul mental, les financiers ont arrondi 69,3 à 72, créant ainsi la règle empirique : Durée de doublement $\approx 72/t$. Avec notre exemple : $72/5 = 14{,}4$ ans, un résultat extrêmement proche de la réalité mathématique.

2 La capitalisation continue et le formalisme exponentiel

Dans le monde réel, les vagues de flux financiers ne s'arrêtent pas au 31 décembre. Les intérêts peuvent être versés mensuellement, quotidiennement, voire de manière continue à chaque instant.

2.1 Le passage à la limite continue

Si un taux annuel r est capitalisé m fois par an, le capital au bout de t années s'élève à $C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$. Lorsque la fréquence de capitalisation tend vers l'infini ($m \to +\infty$), ce qui correspond à une capitalisation continue instantanée, les outils de calcul des limites en Terminale nous enseignent que :

$$\lim_{m\to+\infty} C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = C_0\, e^{rt}$$

Le modèle de capitalisation continue est donc intrinsèquement lié à la fonction exponentielle :

$$C(t) = C_0\, e^{rt}$$

2.2 Détermination du taux de croissance instantané

Puisque la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$), elle est le seul outil capable d'annuler l'effet de l'exponentielle afin de déterminer le taux d'intérêt appliqué sur une période si l'on connaît le capital initial et final. Partons de la relation de capitalisation continue :

$$\frac{C(t)}{C_0} = e^{rt}$$

En appliquant la fonction logarithme de chaque côté, nous éliminons la base exponentielle :

$$\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) = \ln\left(e^{rt}\right)$$

$$\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) = rt$$

Nous pouvons alors isoler le taux d'intérêt continu r :

$$r = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)$$

Cette formule nous offre une interprétation financière pure de la fonction logarithme : le logarithme du rapport entre la richesse finale et la richesse initiale mesure exactement le taux de croissance instantané du capital.

3 L'additivité temporelle des rendements logarithmiques

Sur les marchés financiers, les analystes préfèrent travailler avec des rendements logarithmiques (ou *log-rendements*) plutôt qu'avec des rendements classiques en pourcentage. La raison réside dans une propriété algébrique fondamentale du logarithme : la transformation des produits en sommes.

3.1 Le piège de la non-additivité des rendements classiques

Le rendement classique d'un actif entre deux dates est calculé par la formule $R = \frac{P_{finale}-P_{initiale}}{P_{initiale}}$. Prenons l'exemple d'un actif financier valant 100 euros.

- **Période 1 :** L'actif passe de 100 à 120 euros. Le rendement classique est de $+20\%$.
- **Période 2 :** L'actif chute ensuite de 120 à 90 euros. Le rendement classique est de $\frac{90-120}{120} = -25\%$.

Si un analyste effectue une moyenne arithmétique naïve de ces performances, il obtient :

$$\frac{20\% + (-25\%)}{2} = -2{,}5\% \text{ par période}$$

Or, l'actif est passé globalement de 100 à 90 euros, ce qui représente une perte réelle et objective de -10%, et non de $-2{,}5\%$ cumulé deux fois. Ce biais s'explique par le fait que les rendements classiques ne s'additionnent pas, ils se multiplient via leurs coefficients multiplicateurs :

$$100 \times (1 + 0{,}20) \times (1 - 0{,}25) = 100 \times 1{,}20 \times 0{,}75 = 90$$

3.2 La linéarisation par le rendement logarithmique

Pour éliminer ce biais multiplicatif et permettre des analyses statistiques robustes, la finance quantitative utilise le rendement logarithmique, défini par :

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Calculons les rendements logarithmiques de notre exemple :

- **Période 1 :** $r_1 = \ln\left(\frac{120}{100}\right) \approx 0{,}1823$ (soit $+18{,}23\%$)
- **Période 2 :** $r_2 = \ln\left(\frac{90}{120}\right) \approx -0{,}2877$ (soit $-28{,}77\%$)
- **Somme des rendements :** $r_{total} = r_1 + r_2 = \ln\left(\frac{120}{100}\right) + \ln\left(\frac{90}{120}\right)$

Grâce à la propriété de linéarité du logarithme, $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$, la somme des rendements se simplifie magnifiquement :

$$r_{total} = \ln\left(\frac{120}{100} \times \frac{90}{120}\right) = \ln\left(\frac{90}{100}\right) = \ln(0{,}9) \approx -0{,}1054 \text{ (soit } -10{,}54\%)$$

Le rendement logarithmique global est exactement égal à la somme des rendements logarithmiques de chaque sous-période. Le produit des variations est devenu une simple addition. Cette propriété d'additivité temporelle rend la manipulation mathématique des séries financières infiniment plus stable et élégante.

Limites de l'outil logarithmique en finance

Malgré sa puissance, l'application du logarithme se heurte à des contraintes structurelles qu'il convient de mentionner pour nuancer notre analyse.

1. **Contrainte mathématique du domaine de définition :** La fonction $\ln(x)$ n'est définie que pour des valeurs strictement positives ($x > 0$). Si ce cadre s'ajuste parfaitement aux prix d'actifs (qui ne peuvent être négatifs), il devient inapplicable dès qu'un portefeuille enregistre une valeur nulle ou négative, ou pour modéliser des flux de trésorerie alternant gains et pertes.
2. **Éloignement de l'intuition commerciale :** Le rendement logarithmique est un concept abstrait. Annoncer à des investisseurs particuliers qu'un fonds a réalisé un rendement continu de 9,53% est moins intelligible que d'afficher une hausse classique de 10%, bien que les deux réalités physiques soient mathématiquement équivalentes sur un an.
3. **Absence de pouvoir prédictif :** Le logarithme est un outil de mesure et de modélisation. En aucun cas il ne permet de prédire les tendances futures des marchés ou de supprimer le risque d'effondrement boursier.

Conclusion

En conclusion, la fonction logarithme népérien est loin d'être un simple exercice de style du programme de Terminale. Elle s'impose comme un pilier mathématique de la finance moderne pour trois raisons fondamentales :

- Elle permet d'**extraire le temps** des exposants dans les calculs d'intérêts composés.
- Elle est l'outil indispensable pour **isoler les taux d'intérêt** au sein de la capitalisation continue.
- Elle transforme la complexité des produits financiers multiplicatifs en une **géométrie additive linéaire** et manipulable.

Sans le logarithme, la modélisation financière resterait prisonnière de calculs multiplicatifs inextricables. En transformant le produit en somme, il apporte de la clarté dans la complexité. Et en finance, une mesure claire et rigoureuse est toujours la première condition d'une décision d'investissement intelligente.

Démonstrations

A.1 Démonstration de la limite (Capitalisation continue)

Question : *Pouvez-vous nous détailler étape par étape la démonstration de la limite conduisant à la formule de capitalisation continue ?*

Réponse détaillée : La modélisation de la capitalisation discrète nous dit que si on place un capital C_0 à un taux annuel r, avec m versements d'intérêts dans l'année, le capital au bout de t années est donné par la suite géométrique :

$$A_m = C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Notre but est de trouver la limite de A_m lorsque la fréquence de capitalisation m tend vers l'infini ($m \to +\infty$). L'inconnue m se trouvant à la fois dans la base et dans l'exposant, le calcul direct aboutit à une forme indéterminée du type « 1^∞ ».

C'est ici que la fonction logarithme népérien intervient comme l'outil analytique par excellence pour « redescendre » l'exposant. On étudie le logarithme du ratio :

$$\ln\left(\frac{A_m}{C_0}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}\right) = mt \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right)$$

Pour lever l'indétermination, on effectue un changement de variable. Posons $x = \frac{r}{m}$. Puisque le taux r est une constante fixée, lorsque $m \to +\infty$, on a inévitablement $x \to 0$. De plus, on peut exprimer m en fonction de x : $m = \frac{r}{x}$. L'équation devient :

$$mt \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right) = \left(\frac{r}{x}\right) t \ln(1 + x) = rt \left(\frac{\ln(1 + x)}{x}\right)$$

Nous reconnaissons ici le taux d'accroissement de la fonction logarithme en 1. D'après le cours de Terminale :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Par propriété des limites sur un produit, nous obtenons :

$$\lim_{m \to +\infty} \ln\left(\frac{A_m}{C_0}\right) = rt \times 1 = rt$$

Enfin, la fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut composer cette limite par l'exponentielle de part et d'autre :

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{A_m}{C_0} = e^{rt} \implies \lim_{m \to +\infty} A_m = C_0 e^{rt}$$

Le logarithme a donc permis de débloquer une limite complexe, confirmant que la croissance continue est par nature gouvernée par la fonction exponentielle.

A.2 Pourquoi $\ln(1+i) \approx i$ quand i est petit ?

Question : *Vous avez évoqué que* $\ln(1+i) \approx i$. *Pouvez-vous justifier mathématiquement cette approximation ?*

Réponse détaillée : Cette approximation est la traduction directe du concept mathématique de « l'approximation affine locale » ou plus visuellement, de la tangente à une courbe, que l'on étudie en classe de Première et de Terminale.

Considérons la fonction $f(x) = \ln(1+x)$. Cherchons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 0$. L'équation générale d'une tangente en a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Ici, calculons la dérivée de f : $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Évaluons la fonction et sa dérivée en $a = 0$:

- $f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$
- $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

En substituant dans l'équation de la tangente :

$$y = 1 \times (x-0) + 0 \implies y = x$$

Graphiquement, cela signifie qu'autour de $x = 0$, la courbe de la fonction logarithme $\ln(1+x)$ et la droite $y = x$ sont quasiment confondues. En finance, un taux d'intérêt i (ou k) annuel est typiquement très petit (par exemple 3 % soit 0,03). Étant très proche de 0, on peut valablement remplacer la valeur de la fonction par la valeur sur la tangente. D'où l'approximation : $\ln(1+0{,}03) \approx 0{,}03$ (la valeur exacte est $0{,}02955\ldots$, l'erreur est donc négligeable, de l'ordre de 4×10^{-4}).